

Varianta 093

Subiectul I

a) $AB = \sqrt{13^2 + 13^2} = 13\sqrt{2}$

b) $(4 + 5i)(1 - 2i) = a + bi \Leftrightarrow 4 + 10 - 8i + 5i = a + bi \Leftrightarrow 14 - 3i = a + bi \Leftrightarrow \begin{cases} a = 14 \\ b = -3 \end{cases};$

c) Aria cerută este $\frac{13\sqrt{3}}{4};$

d) $z = -7 + 8i \Rightarrow \bar{z} = -7 - 8i$

e) Se obține sistemul $\begin{cases} 9 - 4a + b = 0 \\ -4 + 9a + b = 0 \end{cases} = \begin{cases} a = 1 \\ b = -5 \end{cases}$

f) Cu teorema lui Pitagora $BC = \sqrt{36 + 144} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$

Subiectul II:

1.

a) $\begin{vmatrix} -1 & 20 \\ -3 & 30 \end{vmatrix} = -30 + 60 = 30;$

b) Deoarece numai 1 și 2 verifică inegalitatea, probabilitatea cerută este $\frac{2}{5};$

c) $25^x - 625 = 0 \Leftrightarrow 25^x = 25^2 \Leftrightarrow x = 2;$

d) $\log_2 x = 2 \Leftrightarrow x = 4;$

e) Prin împărțire se obține câtul $X^4 - X^3 + 3X - 3$ și restul 4;

2.

a) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}, (\forall)x \in \mathbf{R}^*;$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = -1$

c) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty$ și $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$, iar f continuă pe $\mathbf{R}^*$; deci $x = 0$ singura asimptotă

verticală;

d) $\int_1^2 f(x) dx = (2x + \ln x) \Big|_1^2 = 4 + \ln 2 - 2 = 2 + \ln 2;$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n} \right) = 2;$

Subiectul III

a) $1 = 3^0 \cdot 5^0; 3 = 3^1 \cdot 5^0; 5 = 3^0 \cdot 5^1; 9 = 3^2 \cdot 5^0$

b) Presupun că $2 \in A \Rightarrow (\exists) i, j \in \mathbf{N}$ cu $2 = 3^i \cdot 5^j$ fals căci membrul stâng e par iar membrul drept impar; Pentru 7 obținem $7 = 3^i \cdot 5^j$ cu $i, j \in \mathbf{N}$. Dacă $i, j \in \{0\}$ evident fals, iar pentru $i, j \in \mathbf{N}^*$ fals deoarece 7 nu e multiplu de 3(sau 5)

c) Pentru $n = 0$ evident $1 = \frac{1-a}{1-a}$; presupun $1 + a + \dots + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ si am

$$1 + a + \dots + a^n + a^{n+1} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} + a^{n+1} = \frac{1-a^{n+2}}{1-a}$$

d) Membrul stâng se scrie $\frac{1 - \frac{1}{3^{k+1}}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{k+1}}\right) < \frac{3}{2}$

e) Membrul stâng este $\frac{1 - \frac{1}{5^{s+1}}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{4} \left(1 - \frac{1}{5^{s+1}}\right) < \frac{5}{4}$

f) Evident $A \cap \{1, 2, 3, \dots, 20\} = \{1, 3, 5, 9, 15\}$; Răspuns 5

g) Folosind punctele d) si e) obținem că $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} < \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{3^k}\right) \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{5^k}\right) < \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{8}$

Subiectul IV:

a) $f'(x) = 3x^2 - 1, (\forall) x \in \mathbf{R}$;

b) Evident;

c) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

d) Construim tabelul de variație pentru f :

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$	
f'	+	0	-	0	+
f					

Din tabel se vede că $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ este punct de maxim local și $\frac{\sqrt{3}}{3}$ este punct de de minim local

e) $\int_0^1 f(x) dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

f) Prin calcul direct

g) Exemplu: definesc $g, h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = x^3, h(x) = x$, ambele strict crescătoare pe $\mathbf{R}$ și $f(x) = g(x) - h(x), (\forall) x \in \mathbf{R}$